2014

الميكانيكا العامة

جامعة سنار كلية التربية قسم الفيزياء والرياضيات

الفصل الدراسي الثاني

MRT
اعداد الاستاذ الصديق محمد سليمان
1/1/2014

بسم الله الرحمن الرحيم

الميكانيكا العامة

المتجهات

تنقسم الكميات الفيزيائية إلى نوعين

(1)الكميات القياسية:Scalars

هي الكميات الفيزيائية التي تعرف بمقدارها فقط ((الكتلة ، الزمن ، درجة الحرارة ،......))

(2)الكميات المتجهةVectors

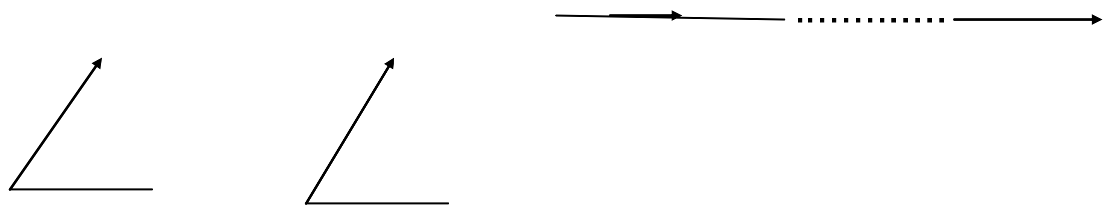
هي الكميات الفيزيائية التي تعرف بمقدارها واتجاهها ((السرعة ،العجلة ،القوة ،.......))

يميز رمز الكمية المتجهة بسهم على رأسه ويأخذ المتجه إشارة موجب وعندما يعكس اتجاهه يأخذ إشارة سالب

خواص المتجهات

(أ) نقل المتجه:

ينقل المتجه من موضع لآخر على نفس خط عمله أو بالتوازي



(ب) **تمثيل المتجه**

يمثل المتجه بخط مستقيم يحمل صفات المتجه من حيث المقدار والاتجاه (ويرسم على خطه سهما)

(جـ) **تحليل المتجه**: يحلل المتجه إلى مركبتين متعامدتين (أفقية ورأسية) فإذا كان المتجه يميل علي الأفقي بزاوية θ فإن مركباته تكون لها الصورة

والمركبة الرأسية $A_y = Asin\theta$ والمركبة الأفقية $A_x = Acos\theta$

حيث A_x ,A_y يمثلان مقدار مركبتي المتجه A في اتجاهي x, y

مقدار المتجه:

ومن المعلوم أن للمتجه مقدار واتجاه ولحساب مقدار المتجه في بعدين

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

ومنها يمكن تعميم القاعدة في ثلاثة إحداثيات وحساب مقدار المتجه

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

متجهات الوحدة$(\boldsymbol{i, j, k})$:

هي متجهات مقدار كلٍ منها الوحدة وتعمل في اتجاهات المحاور الرئيسية x, y, z

وإذا كان لدينا المتجه A ويعمل في اتجاه X فانه يكتب في الصورة

$$\vec{A} = |A|\hat{\imath} \quad \rightarrow \quad \hat{\imath} = \vec{A}/|A|$$

مثال (1)

جد مقدار متجه السرعة التالي $\vec{A} = 6\hat{\imath} + 8\hat{\jmath}$

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10m/s$$

مثال(2)

إذا كان لدينا متجه القوة التالي $\vec{F} = 3\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} + 6\hat{k}$ جد مقداره

$$F = |\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{9 + 36 + 36} = 9N$$

محصلة عدة المتجهات (جمع وطرح المتجهات):

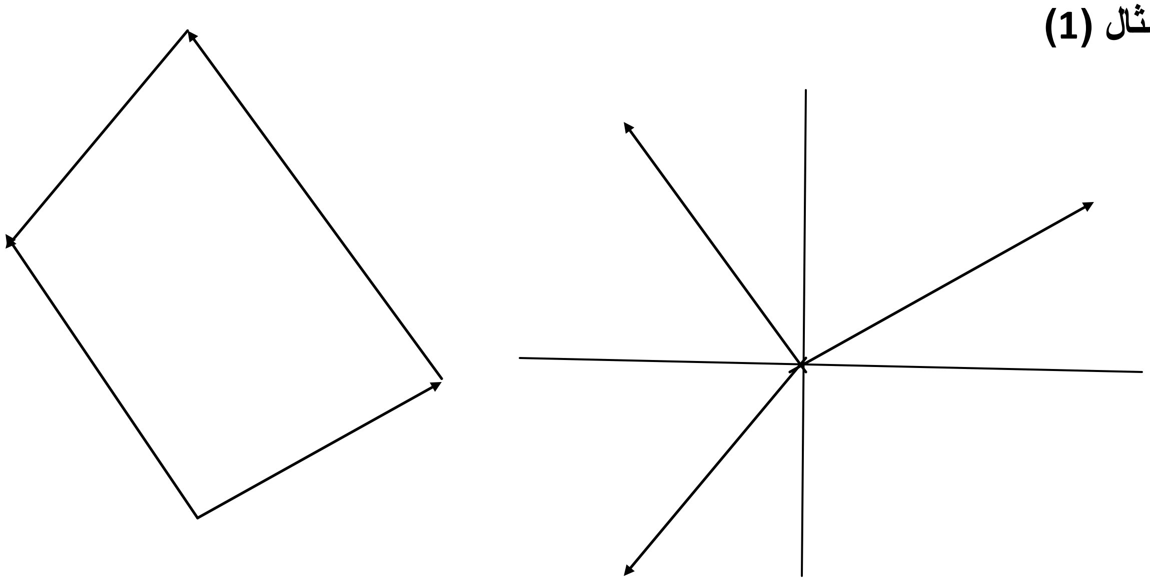
هي المتجه الناتج من تأثير عدة متجهات مجتمعة مع بعضها البعض

ويتم حساب محصلة عدة متجهات بإحدى الطريقتين

(1)الطريقة البيانية (الرسم):

نرسم المتجه الأول ((باستخدام المسطرة والمنقلة مع اختيار مقياس الرسم المناسب)) وعند نهايته نرسم المتجه الثاني وعند نهاية المتجه الثاني نرسم الثالث وهكذا إلى آخر المتجهات ثم نكمل المضلع بالمحصلة (وهي تمثل المتجه الواصل بين بداية أول متجه ونهاية آخر متجه)

مثال (1)



خذ مقياس الرسم (1cm=20)

ومن الرسم يكون طول المحصلة ((بالمسطرة)) 4.36cm ويكون مقدار المحصلة

$$4.36 \times 20 = 87.2cm$$

أما اتجاه (زاوية) المحصلة بالمنقلة (111°)

(2)الطريقة التحليلية:

وفيها يتم تحليل المتجهات إلى مركباتها المتعامدة ثم الجمع أو الطرح

فإذا كانت لدينا المتجهات $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$

$$\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$$

ويكون جمعهما $\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath} + (A_z + B_z)\hat{k}$

ويكون طرحهما $\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}=\overrightarrow{A}+(-\overrightarrow{B})=(A_x-B_x)\hat{\imath}+\left(A_y-B_y\right)\hat{\jmath}+(A_z-B_z)\hat{k}$

مثال (2)

استخدم الطريقة التحليلية (الحسابية) في حل المثال السابق

أولا: نكتب المتجهات في صورة مركباتها كالتالي

$$\vec{A}=A_x\hat{\imath}+A_y\hat{\jmath}=A cos\theta_1\,\hat{\imath}+A\sin\theta_1\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{B}=B_x\hat{\imath}+B_y\hat{\jmath}=B cos\theta_2\hat{\imath}+B\sin\theta_2\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{C}=C_x\hat{\imath}+C_y\hat{\jmath}=C cos\theta_3\hat{\imath}+C\sin\theta_3\,\hat{\jmath}$$

وبالتعويض نحصل على

$$\vec{A}=80cos37\hat{\imath}+80\sin 37\,\hat{\jmath}=64\hat{\imath}+48\hat{\jmath}$$

$$\vec{B}=100cos127\hat{\imath}+100\sin 127\,\hat{\jmath}=-60\hat{\imath}+80\hat{\jmath}$$

$$\vec{C}=60cos53\hat{\imath}+60\sin 53\,\hat{\jmath}=-36\hat{\imath}-48\hat{\jmath}$$

وتكون المحصلة $\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$

$$\rightarrow\vec{R}=64\hat{\imath}+48\hat{\jmath}+(-60\hat{\imath}+80\hat{\jmath})+(-36\hat{\imath}-48\hat{\jmath})=-32\hat{\imath}+80\hat{\jmath}$$

$$\rightarrow R=\left|\vec{R}\right|=\sqrt{(-32)^2+(80)^2}=\sqrt{1024+6400}=87.1cm$$

أما اتجاه المحصلة (زاوية المحصلة) فتحسب بالقاعدة التالية

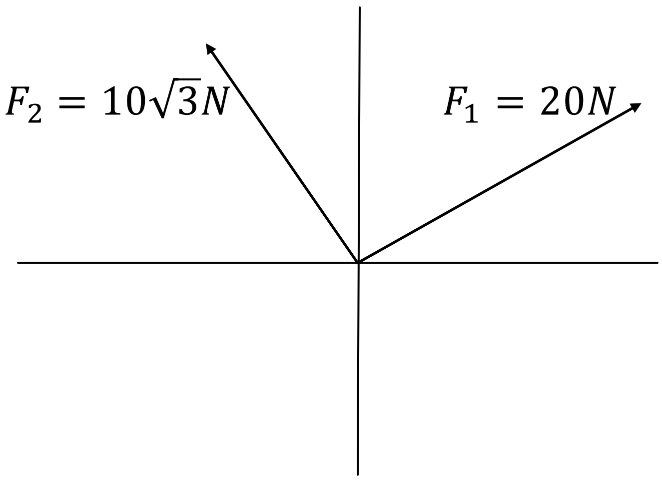
$$\tan\theta=\frac{R_y}{R_x}=\frac{80}{(-32)}\rightarrow\theta=\tan^{-1}\left(\frac{-5}{2}\right)\rightarrow\theta\cong-69^{\circ}$$

تنبيه:

يفضل دائما استخدام الطريقة التحليلية لأنها أكثر دقة من طريقة الرسم (البيانية) ولا تحتاج إلى جهد ووقت

مثال (3)

جد مقدار المحصلة في الشكل التالي



$$\overrightarrow{F_1} = F_x cos\theta_1\,\hat{\imath} + F_y \sin\theta_1\,\hat{\jmath} = 20cos30\hat{\imath} + 20\sin 30\,\hat{\jmath}$$

$$\overrightarrow{F_1} = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\imath} + 20 \times \frac{1}{2}\hat{\jmath} = 10\sqrt{3}\hat{\imath} + 10\hat{\jmath}$$

$$\overrightarrow{F_2} = F_x cos\theta_2\,\hat{\imath} + F_y \sin\theta_2\,\hat{\jmath} = 10\sqrt{3}cos120\hat{\imath} + 10\sqrt{3}\sin 120\,\hat{\jmath}$$

$$\overrightarrow{F_1} = 10\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\right)\hat{\imath} + 10\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\hat{\jmath} = -5\sqrt{3}\hat{\imath} + 15\hat{\jmath}$$

$$\vec{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = 10\sqrt{3}\hat{\imath} + 10\hat{\jmath} + -5\sqrt{3}\hat{\imath} + 15\hat{\jmath} = 5\sqrt{3}\hat{\imath} + 25\hat{\jmath}$$

$$R = |\vec{R}| = \sqrt{\left(5\sqrt{3}\right)^2 + (25)^2} = 26.2N$$

ضرب المتجهات

وينقسم ضرب المتجهات إلى نوعين

(1)ضرب المتجه في كمية قياسية:

دع أنه لدينا متجه $\vec{A}$ وكمية قياسية C فان ناتج ضربهما كمية متجهه $C\vec{A}$

أما مقدار المتجه الجديد $C\vec{A}$ فيكون $|C||\vec{A}|$

مثال

خذ المتجه $\vec{A} = 6\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 6\hat{k}$ ثم جد $3A$

الحل $$\frac{3}{2}\vec{A} = \frac{3}{2}\left(6\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 6\hat{k}\right) = 9\hat{\imath} - 4.5\hat{\jmath} + 9\hat{k}$$

(2) ضرب المتجه في متجه آخر: وتكون نتيجة الضرب إما :

(أ) كمية قياسية: ويسمى الضرب القياسي أو النقطي

(ب) كمية متجهه: ويسمى الضرب الاتجاهي (التقاطعي أو ضرب المقص)

الضرب القياسي

يعرف بين المتجهين $\vec{A}, \vec{B}$ حسب المعادلة التالية

$$\vec{A}.\vec{B} = |A||B|\cos\theta$$

حيث θ تمثل الزاوية بين المتجهين

وبتطبيق الضرب القياسي على متجهات الوحدة نجد

$$\hat{\imath}.\hat{\imath} = |i||i|\cos\theta = 1 \times \cos 0 = 1 \times 1 = 1 \rightarrow \hat{\jmath}.\hat{\jmath} = \hat{k}.\hat{k} = 1$$

$$\hat{\imath}.\hat{\jmath} = |i||j|\cos\theta = 1 \times \cos 90 = 0$$

$$\rightarrow \hat{\jmath}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{\imath} = \hat{\jmath}.\hat{\imath} = \hat{\imath}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{\jmath} = 0$$

خواص الضرب القياسي:

(1) خاصية الإبدال $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$

(2) الخاصية التوزيعية $\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$

(3) إذا كانت m كمية قياسية فإنها تحقق

$$m(\vec{A}.\vec{B}) = (m\vec{A}).\vec{B} = \vec{A}.(m\vec{B}) = (\vec{A}.\vec{B})m$$

(4) شرط التعامد $(\theta = 90 \rightarrow \cos\theta = 0)$

$$\vec{A}.\vec{B} = |A||B|\cos 90 = 0$$

لحساب حاصل الضرب القياسي للمتجهين A, B في ثلاثة إحداثيات

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \qquad \& \qquad \vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$$

$$\vec{A}.\vec{B} = (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}).(B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k})$$

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x\,\hat{\imath}.\hat{\imath} + A_x B_y\,\hat{\imath}.\hat{\jmath} + A_x B_z\,\hat{\imath}.\hat{k} + A_y B_x\,\hat{\jmath}.\hat{\imath} +$$

$$A_y B_y\,\hat{\jmath}.\hat{\jmath} + A_y B_z\,\hat{\jmath}.\hat{k} + A_z B_x\,\hat{k}.\hat{\imath} + A_z B_y\,\hat{k}.\hat{\jmath} + A_z B_z\,\hat{k}.\hat{k}$$

$$\rightarrow \quad \vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

لأن $i.i = j.j = k.k = 1 \qquad \& \qquad i.j = i.k = j.k = 0$

مثال (1)

جد حاصل الضرب القياسي للمتجهين التاليين ثم جد الزاوية بين المتجهين

$$\vec{A} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k} \qquad \& \qquad \vec{B} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$$

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = (2)(3) + (-1)(-4) + (2)(0) = 10$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = 3$$

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2 + (0)^2} = 5$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|A||B|} = \frac{10}{3\times 5} = \frac{2}{3} \quad \rightarrow \theta = \cos^{-1}(\frac{2}{3}) = 48.2^{\circ}$$

مثال (2)

أحسب قيمة X التي تجعل المتجهين التاليين متعامدين

$$\vec{B} = 3\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k} \qquad \& \qquad \vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 2x\hat{k}$$

الحل : شرط التعامد $\theta = 90$

$$\vec{A}.\vec{B} = |A||B|\cos 90 = 0$$

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x\,B_x + A_y\,B_y + A_z\,B_z = 0$$

$$\Longrightarrow \; (2)(3) + (3)(1) + (2x)(-1) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 4.5$$

الضرب ألاتجاهي

يعرف الضرب ألاتجاهي لمتجهين $\vec{A},\vec{B}$ بالمعادلة

$$\vec{A}\times\vec{B} = |A||B|\sin\theta$$

وبتطبيق الضرب ألاتجاهي على متجهات الوحدة نجد

$$\hat{\imath}\times\hat{\imath} = |i||i|\sin\theta = 1\times\sin 0 = 1\times 0 = 0 \Longrightarrow \hat{\jmath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$$

$$\hat{\imath}\times\hat{\jmath} = |i||j|\sin\theta = |i||j|\times\sin 90 = \hat{k}$$

$$\Longrightarrow \hat{\jmath}\times\hat{k} = \hat{\imath} \;\;\&\;\; \hat{k}\times\hat{\imath} = \hat{\jmath} \;\;\&\;\; \hat{\jmath}\times\hat{\imath} = -\hat{k} \;\;\& \hat{\imath}\times\hat{k} = \hat{\jmath} \;\;\&\;\; \hat{k}.\hat{\jmath} = -\hat{\imath}$$

لحساب $\vec{A}\times\vec{B}$ بدلالة مركباتها في ثلاثة إحداثيات

$$\vec{A}\times\vec{B} = (\,A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k})\times(B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k})$$

$$\Longrightarrow \vec{A}\times\vec{B} = A_x\,B_x\,\hat{\imath}\times\hat{\imath} + A_x\,B_y\,\hat{\imath}\times\hat{\jmath} + A_x\,B_z\,\hat{\imath}\times\hat{k} + A_y\,B_x\,\hat{\jmath}\times\hat{\imath} +$$

$$A_y\, B_y\, \hat{\jmath}\times\, \hat{\jmath} + \; A_y\, B_z\, \hat{\jmath}\times\, \hat{k} + \; A_z\, B_x\, \hat{k}\times\, \hat{\imath} + \; A_z\, B_y\, \hat{k}\times\, \hat{\jmath} + \; A_z\, B_z\, \hat{k}\times \hat{k}$$

$$\Longrightarrow\; \vec{A}\times\vec{B} = \; A_x\, B_y\, \hat{\imath}\times\, \hat{\jmath} + \; A_x\, B_z\, \hat{\imath}\times\, \hat{k} + \; A_y\, B_x\, \hat{\jmath}\times\hat{\imath} +$$

$$A_y\, B_z\, \hat{\jmath}\times\, \hat{k} + \; A_z\, B_x\, \hat{k}\times\, \hat{\imath} + \; A_z\, B_y\, \hat{k}\times\, \hat{\jmath}$$

$$= \; A_x\, B_y\hat{k} \; + \; A_x\, B_z(-\hat{\jmath}) + \; A_y\, B_x(-\hat{k}) + \; A_y\, B_z\, \hat{\imath} + \; A_z\, B_x\, \hat{\jmath} + \; A_z\, B_y(-\hat{\imath})$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = (\, A_y\, B_z - \; A_z\, B_y)\hat{\imath} + (\, A_z\, B_x - \; A_x\, B_z)\, \hat{\jmath} + (\, A_x\, B_y - \; A_y\, B_x)\hat{k}$$

ويمكن كتابة النتيجة النهائية بدلالة المحددات

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

مثال(1)

إذا كان لدينا المتجهين $\vec{B} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ & $\vec{A} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$

أحسب (أ) متجه الوحدة في اتجاه $\vec{A}$ (ب) متجه الوحدة في اتجاه $\vec{B}$

(ج) قيمة $\vec{A}\times\vec{B}$ (د) الزاوية بين المتجهين $\vec{A},\vec{B}$

Solution

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{|A|} = \frac{\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k})$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (0)^2} = \sqrt{5}$$

$$\hat{b} = \frac{\vec{B}}{|B|} = \frac{-\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = (\, A_y\, B_z - \; A_z\, B_y)\hat{\imath} + (\, A_z\, B_x - \; A_x\, B_z)\, \hat{\jmath} + (\, A_x\, B_y - \; A_y\, B_x)\hat{k}$$

$$= [(-2)(0) - (1)(2)]i + [(1)(-1) - (1)(0)]j + [(1)(2) - (-2)(-1)]k$$

$$\Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = -2\hat{\imath} - \hat{\jmath}$$

باستخدام الضرب القياسي

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = (1)(-1) + (-2)(2) + (1)(0) = -5$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|A||B|} = \frac{-5}{\sqrt{6}\sqrt{5}} = -\sqrt{\frac{5}{6}} \quad \rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(-\sqrt{\frac{5}{6}}\right) = 156$$

خواص الضرب ألاتجاهي:

(1) لا يحقق خاصية الإبدال $\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$

$$\Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

(2) يحقق الخاصية التوزيعية

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

(3) إذا كانت m كمية قياسية فإنها تحقق

$$m(\vec{A} \times \vec{B}) = (m\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (m\vec{B}) = (\vec{A} \times \vec{B})m$$

(4) شرط التوازي $(\theta = 0 \rightarrow \sin\theta = 0)$

$$\Rightarrow \quad \vec{A} \times \vec{B} = |A||B|\sin 0 = 0$$

مثال(2) : خذ المتجهات التالية ثم جد

$$\vec{A} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - \hat{k} \qquad \& \qquad \vec{B} = \hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k}$$

(أ) $\vec{A} \times \vec{B}$ (ب) $\vec{B} \times \vec{A}$ ثم قارن بينهما (ج)الزاوية بين المتجهين

$$\vec{A} \times \vec{B} = (2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - \hat{k}) \times (\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = (6-(-4))\hat{\imath} + \big(-4-(-1)\big)\hat{\jmath} + (8-(-3))\hat{k}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{A} \times \vec{B} = 10\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 11\hat{k}$$

$$\vec{B} \times \vec{A} = (\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k})(2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - \hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (-4(-6))\hat{\imath} + \big(-1-(-4)\big)\hat{\jmath} + (-3(-8))\hat{k}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{A} \times \vec{B} = -10\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - 11\hat{k}$$

هذا يبرهن أن $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \overrightarrow{A}$

ج/ $\vec{A}.\vec{B} = (2)(1) + (-3)(4) + (-1)(-2) = 2 - 12 + 2 = -8$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{(1)^2 + (4)^2 + (2)^2} = \sqrt{21}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{-8}{\sqrt{14}\sqrt{21}} =$$

متجه الموضع ومتجه الإزاحة

متجه الموضع:

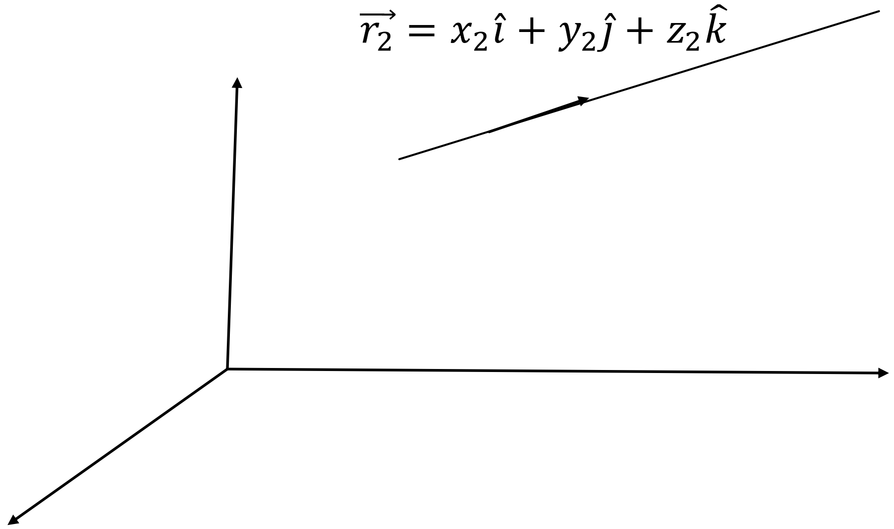
هو المتجه الواصل بين مركز إسناد (مرجعي) معين إلى مكان الجسم المراد تحديد موضعه

ومن الشكل يكون متجه موضع الجسم (1) هو (r_1) يكتب في الصورة التالية

$$\overrightarrow{r_1} = x_1\hat{\imath} + y_1\hat{\jmath} + z_1\hat{k}$$

وإذا أنتقل الجسم للموضع (2) يكون متجه موضعه

$$\overrightarrow{r_2} = x_2\hat{\imath} + y_2\hat{\jmath} + z_2\hat{k}$$



متجه الإزاحة:

هو ذلك التغير الذي ينشأ في متجه الموضع نتيجة حركة الجسم من موضع لآخر

ويمثل بالمتجه $\Delta\vec{r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$

مثال(1)

أكتب متجه موضع جسم موجود عند النقطة $(-2,0,3)$ وموجود عند $(1,3,-1)$

$$\overrightarrow{r_1} = x_1\hat{\imath} + y_1\hat{\jmath} + z_1\hat{k} = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}$$

$$\overrightarrow{r_2} = x_2\hat{\imath} + y_2\hat{\jmath} + z_2\hat{k} = -2\hat{\imath} + 3\hat{k}$$

مثال (2)

إذا كان لدينا جسم موجود في الموضع $(5,1,0)$ ثم أنتقل إلى الموضع $(-3,2,6)$ جد الإزاحة

$$\Delta\vec{r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1} = (x_2 - x_1)\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\Delta\vec{r} = (-3 - 5)\hat{\imath} + (2 - 1)\hat{\jmath} + (6 - 0)\hat{k} = -8\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 6\hat{k}$$

مثال (3)

إذا كان متجه موضع جسم مرتبط بالزمن يعطى بالمعادلة

$$\vec{r}(t) = 2t\hat{\imath} + (8t^2 + 1)\hat{\jmath}(m)$$

أحسب: (أ) متجه الإزاحة خلال الفترة $t = 0.1$ & $t = 0.2$

(ب) متجه الإزاحة خلال الفترة $t = 0.1$ & $t = 0.3$

(أ) $\vec{r}_1(t_1) = 2(0.1)\hat{\imath} + (8(0.1)^2 + 1)\hat{\jmath} = 0.2\hat{\imath} + 1.08\hat{\jmath}$

$$\overrightarrow{r_2}(t_2) = 2(0.2)\hat{\imath} + (8(0.2)^2 + 1)\hat{\jmath} = 0.4\hat{\imath} + 1.32\hat{\jmath}$$

$$\Delta\vec{r} = \overrightarrow{r_2}(t_2) - \vec{r}_1(t_1) = 0.4\hat{\imath} + 1.32\hat{\jmath} - (0.2\hat{\imath} + 1.08\hat{\jmath})$$

$$\Delta\vec{r} = 0.2\hat{\imath} + 0.24\hat{\jmath}$$

(ب) $\vec{r}_1(t_1) = 2(0.1)\hat{\imath} + (8(0.1)^2 + 1)\hat{\jmath} = 0.2\hat{\imath} + 1.08\hat{\jmath}$

$$\overrightarrow{r_2}(t_2) = 2(0.3)\hat{\imath} + (8(0.3)^2 + 1)\hat{\jmath} = 0.6\hat{\imath} + 0.72\hat{\jmath}$$

$$\Delta\vec{r} = \overrightarrow{r_2}(t_2) - \vec{r}_1(t_1) = 0.4\hat{\imath} + 1.32\hat{\jmath} - (0.6\hat{\imath} + 0.72\hat{\jmath})$$

$$\Delta\vec{r} = -0.2\hat{\imath} + 0.6\hat{\jmath}$$

متوسط السرعة:($\vec{V}_{ave}$)

وهي المشتقة الأولى لمتجه الإزاحة بالنسبة للزمن

$$\vec{V}_{ave} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1}\ (ms^{-1})$$

وإذا كانت Δt صغيرة جدا بين مكانين $(\Delta t = 0)$

$$\vec{V}_{ave} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

وبالنسبة لمتجه في ثلاثة أبعاد

$$\vec{V}_{ave} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}\right) = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$\vec{V}_{ave} = V_x\hat{\imath} + V_y\hat{\jmath} + V_z\hat{k}$$

$$\Longrightarrow V_x = \frac{dx}{dt} \quad \& \quad V_y = \frac{dy}{dt} \quad \& \quad V_z = \frac{dz}{dt}$$

مثال(1)

إذا كان موضع جسيم في بعد واحد يعطى بالمعادلة $x = 2t + 5t^2 - 2t^3$ أحسب

أ/ السرعة عندما $t = 2s$

ب/ متوسط السرعة بين $t_1 = 1s \quad \& \quad t_2 = 3s$

$$V_x(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2t + 5t^2 - 2t^3) = 2 + 10t - 6t^2 \qquad \text{(أ)}$$

$$V_x(2) = 2 + 10(2) - 6(2)^2 = -2cms^{-1}$$

$$x_2 = 2(3) + 5(3)^2 - 2(3)^3 = -3cm \qquad \text{(ب)}$$

$$x_2 = 2(1) + 5(1)^2 - 2(1)^3 = 5cm$$

$$\vec{V}_{ave} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{-3 - 5}{3 - 1} = -4cms^{-1}$$

متوسط العجلة:

هو معدل تغير متوسط السرعة بالنسبة للزمن

$$\vec{a}_{ave} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1}$$

إذا كان الجسم يحتاج لزمن قصير جداً حتى ينتقل من V_1 إلى V_2 أي أن $(\Delta t = t_2 - t_1)$ فان السرعة تسمى بالتسارع (العجلة) اللحظي

$$\vec{a}_{ave} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\vec{a}_{ave} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(V_x \hat{\imath} + V_y \hat{\jmath} + V_z \hat{k}\right)$$ في كل الاتجاهات

$$\vec{a}_{ave} = \frac{dV_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dV_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dV_z}{dt}\hat{k} = a_x \hat{\imath} + a_y \hat{\jmath} + a_z \hat{k}$$

وهذا معناه $$a_x = \frac{dV_x}{dt} \quad \& \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} \quad \& \quad a_z = \frac{dV_z}{dt}$$

وكذلك يمكن التعويض عن السرعة بدلالة الإزاحة

$$\vec{a}_{ave} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

ويمكن تعريف العجلة على أنها المشتقة الثانية للإزاحة بالنسبة للزمن

$$\Longrightarrow \quad a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \& \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} \quad \& \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

وبالضرب ألإبدالي في اتجاه x (مثلا) نجد

$$dx = V_x dt \quad \Longrightarrow \quad \int dx = \int_{t_1}^{t_2} V_x dt \quad \Longrightarrow x = \int_{t_1}^{t_2} V_x dt$$

$$dV_x = a_x dt \quad \Longrightarrow \quad \int dV_x = \int_{t_1}^{t_2} a_x dt$$

$$V_x = \int_{t_1}^{t_2} a_x dt$$

ولذلك فان السرعة بين t_2, t_1 تمثل عدديا بالمساحة المحصورة بين منحنى العجلة والزمن

والمستقيمين $t = t_2 \quad \& \quad t = t_1$

مثال (2):

إذا كانت حركة جسم في خط مستقيم تعطى بالعلاقة $x(t) = \frac{1}{2}t^2 - t + 2$ فأحسب

أ/السرعة المتوسطة للجسم بين $x_1 = \frac{3}{2}m$ & $x_2 = \frac{7}{2}m$

ب/متوسط العجلة $x_1 = \frac{3}{2}m$ & $x_2 = \frac{7}{2}m$

ج/العجلة اللحظية عندما $x = \frac{7}{2}m$

أولا نحسب الفترة الزمنية بين x_2, x_1 وهي t_2, t_1

$$x_1(t_1) = \frac{1}{2}t_1^2 - t_1 + 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2} = \frac{1}{2}t_1^2 - t_1 + 2$$

$$t_1^2 - 2t_1 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 1$$

وأيضا
$$x_2(t_2) = \frac{1}{2}t_2^2 - t_2 + 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{7}{2} = \frac{1}{2}t_2^2 - t_2 + 2$$

$$t_2^2 - 2t_2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_2 = 3 \quad \& \quad t_2 = -1$$ مرفوض

السرعة المتوسطة
$$\vec{V}_{ave} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{{}^7/_2 - {}^3/_2}{3 - 1} = \frac{2}{2} = 1cms^{-1}$$

ب/ لحساب متوسط العجلة أولا نحسب

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}t^2 - t + 2\right) = t - 1$$

$$\Rightarrow \quad V_1 = 1 - 1 = 0 \quad \& \quad V_1 = 3 - 1 = 2$$

$$\vec{a}_{ave} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} = \frac{2 - 0}{3 - 1} = \frac{2}{2} = 1m/s^2$$

ج/
$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}(t - 1) = 1m/s^2$$

الحركة في خط مستقيم بعجلة ثابتة

$$\vec{a}_{ave} = \frac{V - V_0}{t - t_0}$$

لكن V هي السرعة عند بدء العجلة عندما يكون الزمن (t_0) أفرض أن $V_0 = 0$

$$\vec{a}_{ave} = \frac{V - V_0}{t} \quad \Longrightarrow \quad V = V_0 + at \quad \rightarrow (1)$$

$$\vec{V}_{ave} = \frac{V + V_0}{2}$$ ومن قانون السرعة المتوسطة

$$\vec{V}_{ave} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \Longrightarrow \quad \Delta x = \vec{V}_{ave} \Delta t \quad \Longrightarrow \quad x - x_0 = \left(\frac{V + V_0}{2}\right)(t - t_0)$$

نفرض أن $t_0 = 0$ و $x_0 = 0$ هي نقطة الاسناد

$$x = \left(\frac{1}{2}V_0 + \frac{1}{2}V\right)(t) = \frac{1}{2}V_0 t + \frac{1}{2}V\, t \rightarrow (*)$$

عوض من (1) في المعادلة (*)

$$x = \frac{1}{2}V_0 t + \frac{1}{2}(V_0 + at)t = V_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad \rightarrow (2)$$

وإذا عوضنا من المعادلة (1)في المعادلة (*)نجد

$$x = \left(\frac{1}{2}V_0 + \frac{1}{2}V\right)\left(\frac{V - V_0}{a}\right) = \frac{1}{2a}(V + V_0)(V - V_0)$$

$$V^2 = V_0^2 + 2ax \quad \rightarrow \quad (3)$$

والمعادلات (1)و(2)و(3) تسمي معادلات حركة الجسم في خط مستقيم بعجلة ثابتة

مثال(1) إذا بلغت سرعة سيارة $20m/s$ وكانت تتحرك بعجلة $2m/s^2$ فأحسب المسافة التي قطعتها والزمن اللازم لذلك إذا كانت سرعتها الابتدائية $10m/s$

$$V^2 = V_0^2 + 2ax \rightarrow \quad x = \frac{V^2 - V_0^2}{2a} = \frac{(20)^2 - (10)^2}{2(2)} = 75m$$

$$t = \frac{V - V_0}{a} = \frac{20 - 10}{2} = 5s$$

الحركة تحت تأثير عجلة الجاذبية

وهي تسمي الحركة بعجلة السقوط الحر (($9.8m/s^2$)) ومن المعلوم أن هذه العجلة تتجه راسيا نحو مركز الأرض ولذلك جميع الأجسام الساقطة لها نفس العجلة ولهذا تكون معادلات الحركة هي نفسها التي درست في الحركة الخطية مع استبدال $a = g \quad \& \quad x = y$

$$V = V_0 + gt \quad \rightarrow (1)$$

$$Y = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \qquad \rightarrow (2)$$

$$V^2 = V_0^2 + 2ay \rightarrow (3)$$

مع أخذ بعض المسلمات: أي أنه إذا كانت حركة الجسم لأعلى فإن السرعة تكون متناقصة وإذا أنعكس اتجاهه تكون سرعته موجبة و ..... الخ

مثال (1)

قذف جسم لأعلى من مبنى ارتفاعه $30m$ وكانت سرعة قذفه $5ms^{-1}$ أحسب

(أ) الزمن الذي يستغرقه حتى يصل إلى الأرض

(ب) أقصى ارتفاع يصل إليه

(ج) سرعة الجسم عند وصوله إلى الأرض

(د) الزمن الذي يستغرقه حتى يكون على ارتفاع $10m$ من سطح الأرض

الحل

$$g = 10\, m/s \qquad \& \qquad V = 5\, m/s \qquad \& \qquad y = -30$$

$$y = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \qquad \Longrightarrow \qquad -30 = 5t - \frac{1}{2}(10) t^2$$

$$-6 = t - t^2 \qquad \Longrightarrow \qquad t^2 - t - 6 = 0$$

$t = 3s \qquad \& \qquad t = -2$ مرفوض

ب/ $V^2 = V_0^2 + 2ay \quad \Longrightarrow \quad y = \dfrac{-V^2 + V_0^2}{2a} = \dfrac{-(0) + (5)^2}{2 \times 10} = 1.25m$

ج/ $V = V_0 - gt = 5 - (10)(3) = -25ms^{-1}$

د/ الزمن الذي يستغرقه حتى يكون على ارتفاع 10m فوق سطح الأرض وهنا يقطع من المبنى لأسفل 20m

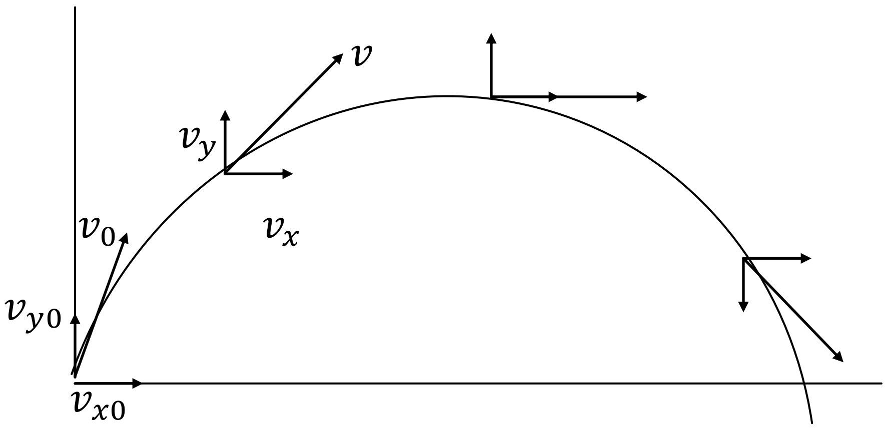
$$y = V_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \quad \Longrightarrow \quad -20 = 5t - \frac{1}{2}(10)t^2$$

$$-4 = t - t^2 \quad \Longrightarrow \quad t^2 - t - 4 = 0$$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-4)}}{2} \quad \Longrightarrow t_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4(-4)}}{2} = 2.56s$$

$t_2 = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4(-4)}}{2} = -1.56$ مرفوض

حركة المقذوفات



من قوانين التحليل $V_{y0} = V_0 \sin\theta$ & $V_{x0} = V_0 \cos\theta$

وفي حركة المقذوفات فان V_y تتغير وفقا لأعلى وأسفل لأن الجاذبية تؤثر عليه بعجلتها أما V_x فهي ثابتة المقدار وتتساوى عند كل النقاط (لان القذيفة تؤثر عليها أفقيا مقاومة الهواء وهي مهملة دائما)

ولذلك عند أي نقطة $V_x = V_{x0}$

ويمكن استنتاج قوانين المقذوفات من قوانين الحركة الخطية

1/ لحساب السرعة النهائية الأفقية

$$V_x = V_{x0} + at = V_{x0} = V_0 \cos\theta$$ (لأن العجلة = صفر)

2/ لحساب الإزاحة (المدى) الأفقي:

$$x = V_{x0}t + \frac{1}{2}at^2 = V_{x0}t = (V_0 \cos\theta)t = tV_0 \cos\theta$$

أما من قوانين الحركة في مجال الجاذبية

3/ لحساب السرعة الرأسية النهائية

$$V_y = V_{y0} + gt = V_0 \sin\theta + gt$$

4/ لحساب الإزاحة الرأسية (إذا كانت الحركة لأعلي فان السرعة تكون سالبة)

$$y = V_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 = (V_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

وأيضا يمكن استنتاج العلاقات التالية

أ/ لحساب أقصي إزاحة يصل إليها المقذوف (V = 0)

$$V_y^2 = V_{y0}^2 + 2gy \quad \Longrightarrow \quad 0 = V_{y0}^2 + 2gy = (V_0 \sin\theta)^2 + 2gy$$

$$\Longrightarrow \quad y = \frac{(V_0 \sin\theta)^2}{2g}$$

ب/ لحساب الزمن التحليق الكلي (y = 0) و g سالبة دائما

$$y = V_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Longrightarrow \quad 0 = (V_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Longrightarrow \quad t = \frac{2V_0 \sin\theta}{g}$$

ج/ لحساب زمن الوصول لأقصى ارتفاع V=0

$$V_y = V_{y0} - gt \quad \Longrightarrow \quad 0 = V_0 \sin\theta - gt$$

$$\Longrightarrow \quad t = \frac{V_0 \sin\theta}{g}$$

ودائما زمن التحليق الكلي يساوي ضعف زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع

ويمكن كتابة معادلة الإزاحة الأفقية في الصورة

$$x = (V_0 \cos\theta)(t) = (V_0 \cos\theta)\left(\frac{2V_0 \sin\theta}{g}\right)$$

$$x = \frac{V_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

و x هنا تمثل أكبر إزاحة أفقية (تسمى المدى)

3/ لحساب السرعة النهائية الكلية بعد الزمن الكلي

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(V_0 \cos\theta)^2 + (V_0 \sin\theta - gt)^2}$$

4/ لحساب زاوية القذف

$$\tan\theta = \frac{V_y}{V_x} = \frac{V_0 \sin\theta - gt}{V_0 \cos\theta}$$

مثال (1)

قذفت كرة من الأرض في الهواء على ارتفاع 10 متر وكانت سرعتها تعطى بالعلاقة

$v = 25i + 20j$ أحسب : أ/السرعة التي قذفت بها الكرة ب/ أعلى ارتفاع تصل إليه

ج/ المدى الأفقي الذي تقطعه الكرة

الحل

من المعادلة $V_x = V_{x0} = 25ms^{-1}$ & $y = 10$ & $V_y = 20ms^{-1}$ & $g = 10ms^{-2}$

أ/ $V_y^2 = V_{y0}^2 - 2gy \Rightarrow 20 = V_{y0}^2 - 2(10)(10)$

$$\Rightarrow \quad V_{y0}^2 = 400 + 200 \quad \Rightarrow \quad V_{y0} = 24.5$$

$$V_0 = \sqrt{V_{0x}^2 + V_{0y}^2} = \sqrt{(25)^2 + (24.5)^2} = \sqrt{1225} = 35ms^{-1}$$

عند اقصى ارتفاع $(V_y = 0)$ $\quad V_y^2 = V_{y0}^2 - 2gy \quad \Rightarrow \quad V_{y0}^2 = 2gy$

$$\Rightarrow (20)^2 = 20y \quad \Rightarrow \quad y = 20m$$

إذا ازاحتها الكلية الرأسية $y = 20 + 10 = 30m$

لحساب المدى الأفقي أولا نحسب الزمن الكلي

$$t = \frac{2V_0 \sin\theta}{g} = \frac{2V_{y0}}{g} = \frac{2(24.5)}{10} = 4.9s$$

$$x = (V_0 \cos\theta)(t) = 25(4.9) = 122.5m$$

مثال (2)

قذف جسم من قمة مبني ارتفاعه 80m عن سطح الأرض بسرعة 15m/s وبزاوية قذف 37°
أحسب أ/أقصى ارتفاع يصل إليه

ب/ ألمدي الأفقي الذي يقطعه الجسم مقاسا من نقطة عند أسفل المبنى تحت نقطة القذف مباشرة

ج/ معادلة مسار الجسم   د/ مكان الجسم بعد ثانيتين

ه/سرعة الجسم بعد ثانيتين وعند وصوله الأرض

عند اقصى ارتفاع $(V_y = 0)$ $V_y^2 = V_{y0}^2 - 2gy \quad \Longrightarrow \quad V_{y0}^2 = 2gy$

$$\Longrightarrow \quad y = \frac{V_{y0}^2}{2g} = \frac{(V_0 \sin\theta)^2}{2g} = \frac{(15 \sin 37)^2}{2(10)} = \frac{(15(3/5))^2}{2(10)} = 4.05m$$

لكن أقصى ارتفاع من سطح الأرض $y = y_1 + y_2$

$$y = 80 + 4.05 = 84.05m$$

ب/ نستخدم المعادلة

$$y - y_0 = V_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = 80 + (15)(3/5)t - (1/2)(10)t^2 \quad \rightarrow \quad 0 = 80 + 9t - 5t^2$$

$$(5t + 16)(t - 5) = 0 \quad \rightarrow t = 5s$$

ج/ لا يجاد معادلة مسار الجسم

$$x = (V_0 \cos\theta)(t) = 15(4/5)t = 12t \qquad \rightarrow (*)$$

$$y = y_0 + V_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 = 80 + 9t - 5t^2 \quad \rightarrow (**)$$

بالتعويض من (*) في المعادلة (**)

$$y = 80 + 9\left(\frac{x}{12}\right) - 5\left(\frac{x}{12}\right)^2 = 80 + 0.75x - 0.035x^2$$

وهي تسمى بمعادلة المسار   (أكمل الحل)

الشغل والطاقة والقدرة

الشغل:

هو حاصل ضرب القوة المتوسطة المؤثرة على الجسم في المسافة التي تتحركها نقطة تأثير القوة علي امتداد خط عمل القوة

1/ في حالة القوة ذات المقدار الثابت

$$W = F.x$$

حيث W تمثل الشغل وx تمثل الإزاحة على امتداد عمل القوة

2/ في حالة القوة المتغيرة في المقدار خطيا من F_1 الى F_2

$$W = \left(\frac{F_1 + F_2}{2}\right).x$$

3/ في حالة القوة المتغيرة خطيا من صفر إلى F

$$W = \frac{1}{2}F.x$$

4/ إذا كانت القوة دالة في الإزاحة

$$W = \int_0^x F(x).dx$$

وفي الصورة العامة

$$W = \int_A^B dW = \int_A^B F(r).d\vec{r}$$

5/ الشغل في الأجسام المرنة (الياي)

إذا تغير طول الياي بمقدار x فان القوة الناتجة تكون $F = kx$ ويكون الشغل الناتج

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F.dx = \int_{x_1}^{x_2} kx.dx = \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$$

حيث x_1 تمثل استطالة الياي الابتدائية و x_2 تمثل استطالة الياي النهائية

وإشارة الشغل تكون موجبة عندما تكون $F = kx$ في اتجاه حركة الجسم وتكون سالبة عندما تكون $F = kx$في عكس اتجاه حركة الجسم

مثال (1)

أثرت قوة مقدارها 20N على جسم فأزاحته $2m$ في اتجاه x الموجب جد الشغل المبذول عليه إذا كانت القوة المؤثرة في نفس خط عمله

$$W = F.x = (20)(2) = 40J$$

مثال (2)

جسم كتلته $7kg$ موجود على سطح أملس أثرت عليه قوة في خط عمله فأزاحته $3m$ بعجلة قدرها $6ms^2$ جد الشغل المبذول عليه

$$W = F.x = ma.x = (7)(3)(6) = 126J$$

الطاقة Energy(E)

هي مقدرة الأجسام على بذل شغل وتقاس بالجول

أ/ طاقة الوضع Potential Energy

هي الطاقة التي يختزنها الجسم نتيجة لوضعه فوق مستوى مرجعي (إسناد) معين

وهي تساوي الشغل المبذول لرفع جسم إلى موضع معين

وتكون طاقة وضع جسم كتلته m على ارتفاع h فوق مستوى مرجعي محدد

$$W = P.E = F.h = mg.h$$

حيثg تمثل عجلة الجاذبية

ب/ طاقة الحركة:kinetic Energy

الطاقة التي يكتسبها الجسم نتيجة لسرعته ((حركته)) من موضع لأخر

إذا أثرت قوة F على جسم ساكن كتلته m وبعد زمن t وصلت سرعته إلى v بعد مسافة x ويكون الشغل المبذول بهذه القوة

$$W = F.x$$

ومن قوانين الحركة الخطية

$$V^2 = V_0^2 + 2a(x - x_0) = 2a(x - 0) \quad \rightarrow x = v^2/2a$$

ومن قانون نيوتن الثاني $F = ma$

$$W = F.x = ma(v^2/2a) = \frac{1}{2}mv^2$$

وهذا الشغل يمثل الطاقة الحركية

$$\Longrightarrow \quad K.E = W = \frac{1}{2}mv^2$$

مثال (1)

أحسب طاقة وضع جسم كتلته $10kg$ موجود علي سطح الأرض إذا بذل عليه شغل لرفعه لقمة مبنى ارتفاعه $15m$ خذ عجلة الجاذبية $10ms^2$

$$P.E = mgh = (10)(10)(15) = 1500j \; (2)$$

مثال (2)

جسم كتلته $2kg$ تحرك من السكون بعجلة منتظمة مقدارها $5ms^{-2}$ جد طاقة حركته بعد $4s$

$$v = v_0 + at = 0 + (5)(4) = 20ms^{-1}$$

$$K.E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(2)(20)^2 = 400J$$

القدرة Power

هي الشغل المبذول بالنسبة للزمن وتقاس بالواط

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F.x}{t}$$

الشغل والطاقة والقدرة للحركات الزاوية

أ/ الشغل المبذول لتدوير جسم

$$W = F.x.\theta = T.\theta$$

حيث T العزم المتوسط و θ الإزاحة الزاوية

وإذا تغير العزم خطيا من الصفر إلى قيمة قصوى T فان

$$W = \frac{1}{2} T . \theta$$

وإذا كان العزم دالة في الإزاحة الزاوية

$$W = \int T(\theta) . d\theta$$

ب/ القدرة الناتجة من عزم الدوران T وسرعة ω زاوية

$$P = T . \omega$$

طاقة الحركة الزاوية

$$K.E = \frac{1}{2} I_g \omega^2$$

حيث I_g بعرف بعزم القصور الذاتي ويساوي حاصل ضرب الكتلة في مربع بعد الجسم عن محور الدوران

$$I_g = mx^2$$

قانون بقاء كمية الحركة الخطية

إذا كان لدينا جسمان يؤثر كل منهما على الآخر بقوة معينة ولذلك لابد من تغير كمية حركة كل منهما ومن قانون نيوتن الثالث فان الدفع الأول يساوي الدفع الثاني ويعاكسه في الاتجاه

الدفع :

هو مقدار التغير في كمية التحرك

لذلك فان التغير في كمية حركة الجسم الأول يساوي التغير في كمية حركة الجسم الثاني ويعاكسه في الاتجاه ولذلك نقول: إذا كانت محصلة القوي المؤثرة الخارجية في مجموعة من الأجسام تساوي صفرا فان المجموع الجبري لكمية حركة هذه الأجسام يبقى ثابتا مقدارا واتجاها

ويكتب من قانون نيوتن الثالث رياضيا

$$m_1 v_1 - m_1 \acute{v}_1 = -(m_2 v_2 - m_2 \acute{v}_2)$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 \acute{v}_1 + m_2 \acute{v}_2 \quad \rightarrow (1)$$

التصادم في بعد واحد :

قد يكون التصادم بين جسمين عندما يتلامسان أو مع عدم تلامسهما (الأجسام المشحونة عندما تتنافر أو جسيمات ألفا وبيتا) ويكون التصادم في بعد واحد إذا بقيا يتحركان بعد التصادم في نفس المحور أما إذا خرج أحدهما أو كلاهما عن المحور فيكون التصادم في بعدين والتصادم في بعد واحد نوعان:

أ/ التصادم المرن:

وهو نوع من التصادمات يكون فيه بقاء أو حفظ كمية الحركة ((أي أن مجموع طاقة الحركة قبل التصادم يساوي مجموع طاقة الحركة بعد التصادم)) ورياضيا يكتب في الصورة

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \acute{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \acute{v}_2^2 \quad \rightarrow (2)$$

ويتطلب هذا النوع من التصادم انفصال الجسمين عن بعضهما مباشرة بعد التصادم ((مثل تصادم الجزئيات وغيرها))

ب/ التصادم غير المرن :

وفي هذا النوع من التصادمات لا تكون الطاقة محافظ عليها ((أي أن مجموع طاقة الحركة قبل التصادم لا يساوي مجموع طاقة الحركة بعد التصادم)) ورياضيا يكتب في الصورة

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2\neq\frac{1}{2}m_1\acute{v}_1^2+\frac{1}{2}m_2\acute{v}_2^2 \quad \rightarrow (3)$$

ملحوظة :

في حالة التصادم المرن أو غير المرن فان كمية الحركة تبقي محافظ عليها دائما

إذا كان لدينا تصادما مرنا فبالرجوع للمعادلة (1) فانه يمكن كتابتها في الصورة

$$m_1(v_1-\acute{v}_1)=m_2(v_2-\acute{v}_2) \quad \rightarrow (*)$$

وحيث أن التصادم مرن فانه يمكن كتابة المعادلة (2) في الصورة

$$\frac{1}{2}m_1(v_1^2-\acute{v}_1^2)=\frac{1}{2}m_2(v_2^2-\acute{v}_2^2) \quad \rightarrow (**)$$

$$m_1(v_1-\acute{v}_1)(v_1+\acute{v}_1)=m_2(v_2-\acute{v}_2)(v_2+\acute{v}_2)$$

وبقسمة (**) على (*) نجد

$$(v_1-v_2)=(\acute{v}_2-\acute{v}_1)=-(\acute{v}_1-\acute{v}_2)$$

$$\rightarrow \qquad v_2=v_1+\acute{v}_1-\acute{v}_2$$

وبتعويضها في (*) والترتيب نحصل على

$$\acute{v}_1=\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)v_1+\left(\frac{2m_2}{m_1+m_2}\right)v_2 \quad \rightarrow (4)$$

$$\acute{v}_2=\left(\frac{2m_2}{m_1+m_2}\right)v_1+\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)v_2 \quad \rightarrow (5)$$

ومن المعادلتين (4) و(5) يمكن استنتاج :

أ/ إذا كان الجسمان متساويان في الكتلة فان :

$$\acute{v}_1=v_2 \qquad \& \qquad \acute{v}_2=v_1$$

أي أن الجسمين يتبادلان سرعتيهما عند التصادم

ب/ إذا كان أحدهما ثابت ((مثلا $v_2=0$)) نحصل علي :

$$\acute{v}_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_1 \quad \& \quad \acute{v}_2 = \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_1$$

ج/إذا كان الجسمان متساويان في الكتلة وكان أحدهما ساكنا $(v_2 = 0)$نحصل على :

$$\acute{v}_2 = v_1 \quad \& \quad \acute{v}_1 = 0$$

د/إذا كانت $m_2 \gg m_1$(مثال كرة تصطدم بحائط) فان الكره ترجع في اتجاه معاكس والحائط يظل ساكنا $\acute{v}_2 = 0 \quad \& \quad \acute{v}_1 = -v_1$

مثال (1)

كرتان كتلتاهما $2kg, 1kg$ يسيران في اتجاهين متعاكسين بسرعتين $24m/s, 12m/s$ فإذا تصادما تصادماً مرنا أحسب سرعة كل منهما بعد التصادم

من قانون حفظ كمية الحركة

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 \acute{v}_1 + m_2 \acute{v}_2$$

$$(1)(12) + (2)(-24) = (1)\acute{v}_1 + (2)\acute{v}_2$$

$$\acute{v}_1 + 2\acute{v}_2 = -36 \quad \rightarrow (1)$$

ومن قانون حفظ طاقة الحركة

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 \acute{v}_1^2 + m_2 \acute{v}_2^2$$

$$(1)(12)^2 + (2)(-24)^2 = (1)\acute{v}_1^2 + (2)\acute{v}_2^2$$

$$\acute{v}_1^2 + 2\acute{v}_2^2 = 1296 \quad \rightarrow (2)$$

وبحل المعادلتين (1) و(2) آنيا نجد

$$\acute{v}_1 = \qquad \& \qquad 2\acute{v}_2 =$$

مثال(2)

أطلقت رصاصة كتلتها 15kg على كتلة خشبية معلقة بخيط كتلتها 3kg فاستقرت داخلها وارتفعت الكتلة الخشبية نتيجة ذلك 10cm على المستوى الأفقي أحسب سرعة الرصاصة أعتبر أن التصادم مرن

الحركة التوافقية البسيطة

عرف كل من المصطلحات التالية :

أ/ الذبذبة الكاملة

ب/ الزمن الدوري Periodic time

خ/ التردد Frequency

د/ الإزاحة Displacement

ه/ الأتساع Amplitude

و/ التردد الزاوي

الحركة التوافقية :

وهي الحركة التي تتناسب فيها عجلة الجسم مع سالب إزاحته

$$a \propto -x \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d^2x}{dt^2} \propto -x$$

$$\ddot{x} = -constant\ x = -\omega^2 x \quad \rightarrow (1)$$

وقد وجد تجريبيا أن $constant = w$

والمعادلة (1) تسمى معادلة الحركة التوافقية البسيطة

والتردد يحسب بالعلاقة $f = w/2\pi$

ونجد أن الزمن الدوري له علاقة بالتردد $T = 1/f$

ويمكن إيجاد معادلة الحركة التوافقية في الصورة الجيبية كالتالي

$$x = Asin(\omega t) \quad \rightarrow (1)$$

وسرعة الجسم تحسب بالعلاقة

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos \omega t \qquad \rightarrow (3)$$

أما عجلته تعطى في الصورة

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 Asin(\omega t)$$

بالنسبة للاهتزازات الحرة:

تكون قوة الإرجاع = - القوة القصورية (الزنبرك)

$$-kx = ma = m\,\frac{dv}{dt} \qquad \rightarrow (5)$$

$$m\,\frac{dv}{dt} + kx = 0$$

حيث k ثابت المهتز التوافقي ويمكن كتابة المعادلة السابقة كالتالي

$$m\frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx} + kx = 0 \;\Rightarrow\; mv\frac{dv}{dx} + kx = 0$$

$$\Rightarrow mvdv + kxdx = 0$$

وبتكامل الطرفين

$$\int mvdv + \int kxdx = 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = c \qquad \rightarrow (6)$$

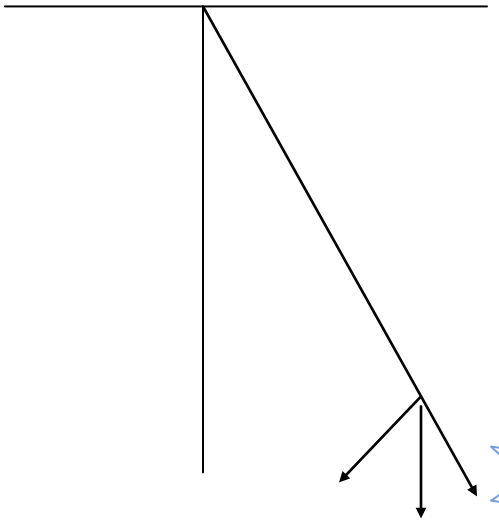
ومن المعادلة السابقة يتضح أن طاقة الحركة وطاقة الوضع للمهتز تساوي مقدارا ثابتاً

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E$$

حيث طاقة الحركة $=\frac{1}{2}mv^2$ وطاقة الوضع $\frac{1}{2}kx^2$

البندول البسيط

وهو عبارة عن جسم معلق في نقطة ثابتة بخيط عديم الوزن غير قابل للشد



قوة إرجاع البندول لأصله $F = -mgsin\theta$

نفرض أن اتساع الذبذبة صغير جدا

أي أن θ صغيرة جدا (طول القوس =طول الوتر)

$$\theta = \sin\theta \quad \Rightarrow \quad F = -mg\theta$$

$$x = L\theta \;\; \Rightarrow F = -\frac{mg}{L}x \;\rightarrow (7)$$

بالمقارنة مع المعادلة (1) في الحركة التوافقية نجد $K = mg/L$

ويمكن التعويض في المعادلة لحساب الزمن الدوري والتردد

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \Longrightarrow \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

والسرعة الزاوية بالعلاقة $\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{g}{L}}$

حيث L تمثل طول الخيط و g عجلة الجاذبية

أما معادلة البندول يمكن اشتقاقها كما يلي :

$$F = -\frac{mg}{L}x = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{L}x = 0$$

ويمكن حلها لاستنتاج أن $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \& \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

مثال (1) جسم كتلته $250g$ مربوط بطرف نابض (ياي) على سطح أفقي أملس فإذا أزيح الجسم مسافة $20cm$ عن موضعه ثم دفع $50cm$ باتجاه الإزاحة فاحسب :

أ/ الزمن الدوري ب/ التردد ج/ السرعة الزاوية د/ الطاقة الكلية

ه/ الأتساع و/ أقصي سرعة له ز/ العجلة

مثال (2) يصنع بندول 150 ذبذبة في الدقيقة أحسب

أ/ الزمن الدوري ب/ التردد ج/ أحسب طول الخيط (خذ عجلة الجاذبية $9.8ms^{-2}$)

تمرين:

نابض معلق عموديا علقت به كره كتلتها $1kg$ فبعد أن اتزن النظام شدت الكتلة إلى أسفل مسافة $10cm$ ثم دفعت بعد ذلك بسرعة $1ms^{-1}$ نحو الأسفل فإذا علمت أن الثابت $k = 1000N/m$ جد:أ/ تردد الجسم ب/ الطاقة الكلية ج/ الأتساع د/ الزمن الدوري